УДК 517.927.2:621.372.8
doi:10.21685/2072-3040-2021-2-6

Метод операторных пучков и оператор-функций в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения

Е. Ю. Смолькин[1], М. О. Снегур[2]

[1,2]Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

[1]e.g.smolkin@hotmail.com, [2]snegur.max15@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – исследование спектра задачи о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения. *Материалы и методы.* Для определения решения использована вариационная формулировка задачи. Вариационная задача сводится к изучению операторного пучка, нелинейно зависящего от спектрального параметра. *Результаты.* Доказаны теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости. Рассмотрен вопрос полноты системы собственных и присоединенных векторов оператор-функции. Доказана теорема о двукратной полноте системы собственных и присоединенных векторов оператор-функции с конечным дефектом. *Вывод.* Предложенный аналитический метод позволяет доказать дискретность спектра в задаче закрытого неоднородного волновода произвольного сечения. Кроме того, данный метод может быть использован для исследования спектральных свойств более сложных волноведущих структур.

Ключевые слова: задача распространения электромагнитных волн, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, вариационная формулировка, пространства Соболева, двукратная полнота с дефектом по Келдышу

Финансирование: работа написана при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-242.2019.1.

Для цитирования: Смолькин Е. Ю., Снегур М. О. Метод операторных пучков и оператор-функций в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 2. С. 77–89. doi:10.21685/2072-3040-2021-2-6

The method of operator beams and operator functions in the problem of normal waves of a closed regular inhomogeneous dielectric waveguide of arbitrary cross section

E.Yu. Smol'kin[1], M.O. Snegur[2]

[1,2]Penza State University, Penza, Russia

[1]e.g.smolkin@hotmail.com, [2]snegur.max15@gmail.com

Abstract. *Background.* The aim of this work is to study the spectrum of the problem of normal waves of a closed regular inhomogeneous dielectric waveguide of arbitrary cross section. *Material and methods.* To determine the solution, a variational formulation of the problem was used. The variational problem is reduced to the study of an operator pencil that depends nonlinearly on the spectral parameter. *Results*. Theorems on the discreteness of the spectrum and on the distribution of the characteristic numbers of an operator function on the complex plane are proved. The question of completeness of the system of eigenvectors and associated vectors of the operator-function is considered. A theorem on the double completeness of the system of eigenvectors and associated vectors of an operator function with a finite defect is proved. *Conclusions*. The proposed analytical method makes it possible to prove the discreteness of the spectrum in the problem of a closed inhomogeneous waveguide of an arbitrary cross section. In addition, this method can be used to study the spectral properties of more complex waveguide structures.

Keywords: electromagnetic wave propagation problem, Maxwell's equation, differential equations, variational formulation, Sobolev spaces, double completeness with the Keldysh defect

Acknowledgments: the work was written with the financial support of a grant from the President of the Russian Federation No. MK-242.2019.1.

For citation: Smol'kin E.Yu., Snegur M.O. The method of operator beams and operator functions in the problem of normal waves of a closed regular inhomogeneous dielectric waveguide of arbitrary cross section. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;2:77–89. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-2-6

Введение

Волновод – это структура, которая направляет волны, такие как электромагнитные волны или звук, с минимальными потерями энергии за счет ограничения передачи энергии в одном направлении. Существуют разные типы волноводов для разных типов волн. Наиболее распространенная волноведущая структура – полая проводящая металлическая труба, используемая для передачи высокочастотных радиоволн, особенно микроволн. Диэлектрические волноводы используются на более высоких радиочастотах, а прозрачные диэлектрические волноводы и оптические волокна служат световодами. В акустике воздуховоды и рупоры используются в качестве волноводов для звука в музыкальных инструментах и громкоговорителях, а металлические стержни специальной формы проводят ультразвуковые волны при ультразвуковой обработке. Геометрия волновода отражает его функцию в дополнение к более распространенным типам, которые направляют волну в одном измерении; существуют двумерные пластинчатые волноводы, которые ограничивают волны в двух измерениях. Частота передаваемой волны также определяет размер волновода: каждый волновод имеет длину волны отсечки, определяемую его размером, и не будет проводить волны с большей длиной волны; оптическое волокно, которое направляет свет, не будет пропускать микроволны с гораздо большей длиной волны. Закрытый волновод – трубчатый электромагнитный волновод (обычно с круглым или прямоугольным поперечным сечением), имеющий электропроводящие стенки, полый или заполненный диэлектрическим материалом, способный поддерживать большое количество дискретных распространяющихся мод, но только некоторые из них могут быть практичными, в которых каждая дискретная мода определяет постоянную распространения для этой моды, в которой поле в любой точке может быть описано в терминах поддерживаемых мод, в которых нет поля излучения и в которых могут быть неоднородности и изгибы. Волноводы почти всегда изготавливаются из металла и в основном из жестких конструкций. Существуют определенные типы «гофрированных» волноводов, которые могут изгибаться, но используются только там, где это необходимо, поскольку они ухудшают свойства распространения. Из-за распространения энергии в основном в воздухе или пространстве внутри волновода – это один из типов линий передачи с наименьшими потерями и очень предпочтительный для высокочастотных приложений, где большинство других типов передающих структур вносят большие потери. Из-за скин-эффекта на высоких частотах электрический ток вдоль стенок обычно проникает в металл внутренней поверхности всего на несколько микрометров. Поскольку именно здесь происходит большая часть резистивных потерь, важно, чтобы проводимость внутренней поверхности поддерживалась как можно более высокой. По этой причине внутренние поверхности большинства волноводов покрыты медью, серебром или золотом. В данной работе мы рассматриваем только регулярные (имеющие постоянное сечение перпендикулярно оси волновода) экранированные неоднородные волноводы произвольного сечения.

Исследование спектра волн, распространяющихся в волноводе, является важнейшей задачей в электродинамике. Существует подход для изучения спектральных свойств таких задач, при котором исходная задача распространения сводится к исследованию спектральных свойств операторных пучков. В работах [1–3] исследовались схожие задачи, были получены значительные результаты теории распространения нормальных волн в закрытых (экранированных) однородных волноводах: доказана дискретность спектра задачи, получены результаты о распределении (локализации) характеристических чисел на комплексной плоскости, а также доказан ряд теорем о кратной полноте по Келдышу системы собственных и присоединенных векторов задачи в специальных пространствах. Однако исследование неоднородных экранированных волноведущих структур вызывало ряд трудностей. Эти трудности удалось преодолеть сведением задачи к исследованию уже оператор-функции, а не операторного пучка. Оказалось возможным доказать ряд теорем, а именно: доказаны теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости. Удалось также рассмотреть вопрос полноты системы собственных и присоединенных векторов оператор-функции. Доказана теорема о двукратной полноте системы собственных и присоединенных векторов оператор-функции с конечным дефектом, что не было сделано ранее, насколько известно авторам.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Oxyz$.

Имеем математическую модель регулярной (вдоль оси Oz), экранированной волноведущей структуры, поперечное сечение которой плоскостью $z = \text{const}$ образовано ограниченной областью Ω с границами Γ_1 и Γ_2 (рис. 1). Границы Γ_1 и Γ_2 – проекции поверхности идеально проводящего, бесконечно тонкого экрана.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют вид $\varepsilon_0\varepsilon(x)$ и $\mu_0\mu(x)$, где $x = (x, y)$. Предполагаем также, что $\varepsilon(x)$, $\operatorname{Im}\varepsilon(x) = 0$, $\mu(x)$, $\operatorname{Im}\mu(x) = 0$ – непрерывно дифференцируемые функции в области Ω, т.е. $\varepsilon(x),\ \mu(x) \in C^1(\Omega)$.

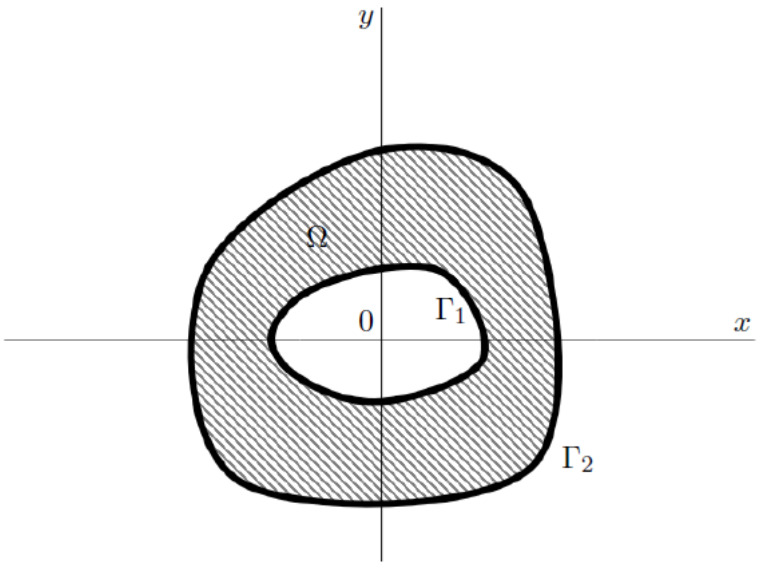

Рис. 1. Геометрия задачи

Чтобы решить задачу о нормальных волнах волноведущей структуры необходимо найти нетривиальные решения однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, т.е. с зависимостью $e^{i\gamma z}$ от координаты z, вдоль которой структура регулярна:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\mu\mathbf{H}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_x(\mathrm{x})\mathbf{e}_x + E_y(\mathrm{x})\mathbf{e}_y + E_z(\mathrm{x})\mathbf{e}_z)e^{i\gamma z}, \\ \mathbf{H} &= (H_x(\mathrm{x})\mathbf{e}_x + H_y(\mathrm{x})\mathbf{e}_y + H_z(\mathrm{x})\mathbf{e}_z)e^{i\gamma z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Также необходимо учесть следующие условия: ограниченность энергии поля в любом конечном объеме волновода:

$$\int_V \left(\varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2\right) dX < \infty\,; \tag{3}$$

обращение в нуль на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля:

$$\mathbf{E}_\tau\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \ \mathbf{E}_\tau\big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{4}$$

Здесь $X = (x, y, z)$, $V \subset \Sigma := \{X : \mathrm{x} \in \Omega\}$ – любой конечный объем. Система уравнений Максвелла (1) записана в нормальном виде. Осуществлен переход к безразмерным величинам [3]: $k_0\mathrm{x} \to \mathrm{x}$, $\gamma \to \dfrac{\gamma}{k_0}$, $\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$, где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$ и μ_0, ε_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума (временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен).

Задача о нормальных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра γ – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - i\gamma H_y = -i\varepsilon E_x, \\ i\gamma H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -i\varepsilon E_y, \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = -i\varepsilon E_z, \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - i\gamma E_y = i\mu H_x, \\ i\gamma E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = i\mu H_y, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\mu H_z, \end{cases} \tag{5}$$

выразим функции E_x, H_x, E_y, H_y через E_z и H_z из 1, 2, 4 и 5-го уравнений последней системы, получим:

$$E_x = \frac{i}{\kappa^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right),\ H_x = \frac{i}{\kappa^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right),$$

$$E_y = \frac{i}{\kappa^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right),\ H_y = \frac{i}{\kappa^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \tag{6}$$

где $\kappa^2 = \gamma^2 - \varepsilon\mu$.

Из формулы (6) очевидно, что поле нормальной волны в волноводе может быть записано через две скалярные функции:

$$\Pi(x,y) := E_z(x,y),\ \Phi(x,y) := H_z(x,y). \tag{7}$$

Далее необходимо найти функции Π и Φ – продольные компоненты электрического и магнитного полей (электрический и магнитный векторы Герца).

Для компонент поля Π и Φ можем сформулировать следующую задачу на собственные значения: найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{L}\Pi := \Delta\Pi - \kappa^2\Pi = -\left(\dfrac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} + \dfrac{1}{\kappa^2}\nabla\varepsilon\mu\right)\nabla\Pi - \dfrac{\gamma}{\varepsilon\kappa^2}J(\varepsilon\mu,\Phi), \\ \mathrm{L}\Phi := \Delta\Phi - \kappa^2\Phi = -\left(\dfrac{\nabla\mu}{\mu} + \dfrac{1}{\kappa^2}\nabla\varepsilon\mu\right)\nabla\Phi + \dfrac{\gamma}{\mu\kappa^2}J(\varepsilon\mu,\Pi), \end{cases} \tag{8}$$

$$J(u,v) := \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

и которые удовлетворяют условиям сопряжения на Γ_1 и Γ_2

$$\Pi\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = 0, \tag{9}$$

$$\Pi\big|_{\Gamma_2} = 0,\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

условию ограниченности энергии в любом конечном объеме V

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left|\nabla\Pi\right|^2 + \left|\nabla\Phi\right|^2 + \left|\Pi\right|^2 + \left|\Phi\right|^2\right)dx < \infty. \tag{11}$$

Здесь n – орт внешней нормали к Ω, τ – касательный орт, причем $x \times y = \tau \times n$.

После того как стали известны продольные компоненты поля Π и Φ в качестве решения задачи (8)–(11), остается определить поперечные составляющие по формулам (6). Найденное таким образом поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяет всем условиям (1)–(3). Эквивалентность перехода к задаче (8)–(11) нарушается лишь в случае $\gamma^2 = \varepsilon\mu$; тогда потребуется отдельное рассмотрение системы (1).

2. Вариационное соотношение

Будем искать решения Π и Φ задачи (8)–(11) в пространствах Соболева соответственно

$$H_0^1(\Omega) \text{ и } H^1(\Omega),$$

со скалярным произведением и нормой

$$(f,g)_1 = \int\limits_{\Omega}\left(\nabla f \nabla \overline{g} + f\overline{g}\right)dx,\ \|f\|_1^2 = (f,f)_1.$$

Дадим другую вариационную формулировку задачи (8)–(11). Умножим уравнения системы (8) соответственно на пробные функции $\overline{u}$ и $\overline{v}$, считая их пока непрерывно дифференцируемыми в Ω, и применив формулу Грина [4] для области Ω, получим

$$\int\limits_{\Omega}\overline{u}\mathrm{L}\Pi dx = \int\limits_{\Gamma_2}\overline{u}\left.\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}d\tau - \int\limits_{\Gamma_1}\overline{u}\left.\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}d\tau - \int\limits_{\Omega}\nabla\Pi\nabla\overline{u}dx - \int\limits_{\Omega}\kappa^2\Pi\overline{u}dx,$$

и

$$\int\limits_{\Omega}\overline{v}\mathrm{L}\Phi dx = \int\limits_{\Gamma_2}\overline{v}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}d\tau - \int\limits_{\Gamma_1}\overline{v}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}d\tau - \int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\nabla\overline{v}dx - \int\limits_{\Omega}\kappa^2\Phi\overline{v}dx,$$

принимая во внимание краевые условия (9) и (10), получаем

$$\int_{\Omega} \bar{u} \mathrm{L} \Pi dx = -\int_{\Omega} \nabla \Pi \nabla \bar{u} dx - \int_{\Omega} \kappa^2 \Pi \bar{u} dx$$

и

$$\int_{\Omega} \bar{v} \mathrm{L} \Phi dx = -\int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla \bar{v} dx - \int_{\Omega} \kappa^2 \Phi \bar{v} dx .$$

Принимая во внимание правые части уравнений системы (8), получаем

$$\int_{\Omega} \bar{u} \mathrm{L} \Pi dx = -\int_{\Omega} \bar{u} \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Pi dx - \int_{\Omega} \bar{u} \frac{\gamma}{\varepsilon \kappa^2} J(\varepsilon \mu, \Phi) dx$$

и

$$\int_{\Omega} \bar{v} \mathrm{L} \Phi dx = -\int_{\Omega} \bar{v} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Phi dx + \int_{\Omega} \bar{v} \frac{\gamma}{\mu \kappa^2} J(\varepsilon \mu, \Pi) dx.$$

Таким образом, мы получаем

$$\int_{\Omega} \nabla \Pi \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} \kappa^2 \Pi \bar{u} dx = \int_{\Omega} \bar{u} \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Pi dx + \int_{\Omega} \bar{u} \frac{\gamma}{\varepsilon \kappa^2} J(\varepsilon \mu, \Phi) dx \quad (12)$$

и

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega} \kappa^2 \Phi \bar{v} dx = \int_{\Omega} \bar{v} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Phi dx - \int_{\Omega} \bar{u} \frac{\gamma}{\mu \kappa^2} J(\varepsilon \mu, \Pi) dx. \quad (13)$$

Складывая последние выражения, получаем вариационное соотношение

$$\gamma^2 \int_{\Omega} \left(\Pi \bar{u} + \Phi \bar{v} \right) dx + \int_{\Omega} \left(\nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v} \right) dx - \int_{\Omega} \left(\varepsilon \mu + 1 \right) \left(\Pi \bar{u} + \Phi \bar{v} \right) dx -$$

$$-\int_{\Omega} \left(\bar{u} \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Pi + \bar{v} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \right) dx -$$

$$-\int_{\Omega} \left(\bar{u} \frac{\gamma}{\varepsilon \kappa^2} J(\varepsilon \mu, \Phi) - \bar{u} \frac{\gamma}{\mu \kappa^2} J(\varepsilon \mu, \Pi) \right) dx. \quad (14)$$

Определение 1. Пару функций

$$\Pi \in H_0^1(\Omega), \Phi \in H^1(\Omega) \ \left(\|\Pi\|_1 + \|\Phi\|_1 \neq 0 \right)$$

будем называть собственным вектором задачи (8)–(11), отвечающим характеристическому числу (х.ч.) $\gamma_0 \in \mathbb{C}$, если при $\gamma = \gamma_0$ выполнено вариационное соотношение (14) для любых $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$, $\bar{v} \in H^1(\Omega)$.

3. Задача о спектре оператор-функции

Пусть $H = H_0^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ – декартово произведение гильбертовых пространств со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1,\ \|\mathbf{u}\|^2 = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2;\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in H,$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T,\ u_1, v_1 \in H_0^1(\Omega),\ u_2, v_2 \in H^1(\Omega).$$

Тогда интегралы, входящие в (14), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$, заданные на H от аргументов

$$\mathbf{u} = (\Pi, \Phi)^T, \mathbf{v} = (u, v)^T.$$

Эти формы определяют [5] некоторые линейные ограниченные операторы $\mathrm{T}: H \to H$ по формуле

$$\mathrm{t}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathrm{T}\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \forall\mathbf{v}\in H, \tag{15}$$

при условии, что сами формы ограничены: $|\mathrm{t}(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le C\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность – из оценок

$$\|\mathrm{T}\mathbf{u}\|^2 = \mathrm{t}(\mathbf{u},\mathrm{T}\mathbf{u}) \le C\|\mathbf{u}\|\|\mathrm{T}\mathbf{u}\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$\mathrm{k}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \left(\Pi\bar{u} + \Phi\bar{v}\right)dx = (\mathrm{K}\,\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \forall\mathbf{v}\in H,$$

$$\tilde{\mathrm{k}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega (\varepsilon\mu + 1)\left(\Pi\bar{u} + \Phi\bar{v}\right)dx = (\tilde{\mathrm{K}}\,\mathbf{u},\mathbf{v}), \forall\mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{k}_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2}\left(\varepsilon_x\Pi\bar{u} + \Phi\bar{v}\right)dx = (\mathrm{K}_2(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \forall\mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \left(\nabla\Pi\nabla\bar{u} + \nabla\Phi\nabla\bar{v} + \Pi\bar{u} + \Phi\bar{v}\right)dx = (\mathrm{I}\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \forall\mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{b}_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \left(\bar{u}\left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\kappa^2}\nabla\varepsilon\mu\right)\nabla\Pi + \bar{v}\left(\frac{\nabla\mu}{\mu} + \frac{1}{\kappa^2}\nabla\varepsilon\mu\right)\right)dx = (\mathrm{B}_1(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \forall\mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{b}_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \left(\bar{u}\frac{\gamma}{\varepsilon\kappa^2}J(\varepsilon\mu,\Phi) - \bar{u}\frac{\gamma}{\mu\kappa^2}J(\varepsilon\mu,\Pi)\right)dx = (\mathrm{B}_2(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \forall\mathbf{v}\in H.$$

Ограниченность форм $\mathrm{a}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, очевидна. Ограниченность форм $\mathrm{k}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\tilde{\mathrm{k}}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, следует из неравенства Пуанкаре [6]. Ограниченность форм $\mathrm{b}_1(\mathbf{u},\mathbf{v})$ и $\mathrm{b}_2(\mathbf{u},\mathbf{v})$ показана в [7, 8].

Теперь вариационную задачу (14) можно записать в операторном виде:

$$(\mathrm{N}(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

или эквивалентно:

$$\mathrm{N}(\gamma)\mathbf{u} = 0, \mathrm{N}(\gamma): H \to H,$$

$$\mathrm{N}(\gamma) := \gamma^2 \mathrm{K} + \mathrm{I} - \tilde{\mathrm{K}} - \mathrm{B}_1(\gamma) - \mathrm{B}_2(\gamma). \tag{16}$$

Уравнение (16) – операторная запись вариационного соотношения (14). Характеристические числа и собственные векторы $\mathrm{N}(\gamma)$ совпадают с собственными значениями и собственными векторами задачи (8)–(11) при $\gamma^2 \neq \varepsilon\mu$.

4. Свойства спектра оператор-функции

Приведем следующие утверждения о свойствах операторов, входящих в $\mathrm{N}(\gamma)$ (доказательство см. в [3, 7, 8]).

Лемма 1. Операторы K и $\tilde{\mathrm{K}}$ компактные. Оператор K положительно определен и для его собственных чисел верна асимптотика

$$\lambda_n(\mathrm{K}) = O(n^{-1}), \ n \to \infty.$$

Лемма 2. Оператор-функции $\mathrm{B}_1(\gamma)$ и $\mathrm{B}_2(\gamma)$ являются компактными и голоморфными в области

$$\mathbb{C} \setminus \Lambda_0 \text{ и } \Lambda_0 := \left\{\gamma : \gamma^2 = \varepsilon_x(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Лемма 3. Существует $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $\mathrm{N}(\tilde{\gamma})$ непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество $\rho(\mathrm{N}) := \left\{\gamma : \exists \mathrm{N}^{-1}(\gamma) : H \to H\right\}$ оператор-функции $\mathrm{N}(\tilde{\gamma})$ не пусто; $\rho(\mathrm{N}) \neq \varnothing$.

Теорема 1. Оператор-функция $\tilde{\mathrm{N}}(\gamma) : H \to H$ является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области Λ.

Теорема 2. Спектр оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma) : H \to H$ является дискретным в Λ, т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте $\mathrm{K}_0 \subset \Lambda$.

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием теоремы 1 и теоремы о голоморфной оператор-функции [9].

Лемма 4. Спектр оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$ симметричен относительно действительной и мнимой оси

$$\sigma(\mathrm{N}) = \overline{\sigma(\mathrm{N})} = -\sigma(\mathrm{N}).$$

Если γ_0 – х.ч. оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$ с собственным вектором $\mathbf{u}_1 = \left(\Pi, \Phi\right)^T$, то числа $-\gamma_0, \overline{\gamma}_0, -\overline{\gamma}_0$ также будут характеристическими той же кратности для оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$ с собственными векторами $\mathbf{u}_2 = \left(-\Pi, \Phi\right)^T, \mathbf{u}_3 = \left(\overline{\Pi}, \overline{\Phi}\right)^T, \mathbf{u}_4 = \left(-\overline{\Pi}, \overline{\Phi}\right)^T$ соответственно.

Доказательство. Доказательство заключается в простой проверке вариационного соотношения (14) для указанных в теореме случаев. Следует отметить, что присоединенные векторы для точки $\overline{\gamma}_0$ также строятся с помощью операции взятия комплексного сопряжения из соответствующих присоединенных векторов, отвечающих γ_0.

5. Теорема о полноте системы собственных и присоединенных векторов оператор-функции

Число γ_0 называется характеристическим числом (х.ч.) оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$, если уравнение $\mathrm{N}(\gamma_0)\phi_0 = 0$ имеет нетривиальное решение $\phi_0 \neq 0$. Последние называются собственными векторами $\mathrm{N}(\gamma)$. Говорят, что векторы $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_k$ образуют цепочку присоединенных векторов, если для них выполняются соотношения

$$\mathrm{N}(\gamma_0)\phi_p + \frac{1}{1!}\frac{\partial \mathrm{N}(\gamma_0)}{\partial \gamma_0}\phi_{p-1} + ... + \frac{1}{p!}\frac{\partial^p \mathrm{N}(\gamma_0)}{\partial \gamma_0^p}\phi_0 = 0, p = \overline{1,k}. \quad (17)$$

При этом число $(k+1)$ называют длиной цепочки, оно может быть как конечным, так и бесконечным. Будем говорить, что собственный вектор ϕ_0 имеет конечный ранг, если наибольшая по длине цепочка, отвечающая ϕ_0, имеет длину R.

Определение 2. Канонической системой собственных и присоединенных векторов при $\gamma = \gamma_0$

$$\phi_0^{(k)}, \phi_1^{(k)}, ..., \phi_{m_k}^{(k)}, k = 1, 2, ...,$$

называется система, обладающая свойствами:

1. Вектор $\phi_0^{(1)}$ есть собственный вектор, ранг которого достигает возможного максимума $(m_1 + 1)$.

2. Вектор $\phi_0^{(k)}$ есть собственный вектор, не выражающийся линейно через $\phi_0^{(k)}, \phi_1^{(k)}, ..., \phi_{m_k}^{(k)}$, ранг которого достигает возможного максимума $(m_k + 1)$.

3. Векторы $\phi_0^{(k)}, \phi_1^{(k)}, ..., \phi_{m_k}^{(k)}$ образуют цепочку присоединенных векторов.

4. Векторы $\left\{\phi_0^{(k)}\right\}$ образуют базис пространства $\ker \mathrm{N}(\gamma_0)$. Число $m+1+m+2+...$ называется алгебраической кратностью х.ч. γ_0.

Определение 3. Система собственных и присоединенных векторов (с.п.в.) оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$ называется n-кратно полной, если любой набор их n векторов $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$ может быть представлен как предел по норме пространства линейных комбинаций

$$\xi_{v,M}=\sum_{k=1}^{M}\sum_{p}\alpha_{p,M}^{(k)}\phi_{p}^{(k,v)},\ v=0,1,...n-1, \tag{18}$$

с коэффициентами $\alpha_{p,M}^{(k)}$, не зависящими от v, где

$$\phi_p^{(k,v)}=\frac{d^v}{dt^v}\bigg|_{t=0} e^{\gamma_k t}\left(\phi_p^{(k)}+\frac{t}{1!}\phi_{p-1}^{(k)}+...\frac{t^p}{p!}\phi_0^{(k)}\right),$$

γ_k – х.ч. оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$.

Рассмотрим оператор-функцию $\mathrm{N}(\gamma)$ в области $\Lambda_\eta=\{\gamma:|\gamma|>\eta\}$, где η – произвольное положительное число, такое что $\eta>\max_{x\in\bar{\Omega}}\varepsilon_x$. Причем очевидно, что $\Lambda_\eta\subset\Lambda$.

Теорема 3. Система с.п.в. оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$, отвечающих х.ч. из множества Λ_η, двукратно полна с конечным дефектом в $H\times H$:

$$\dim\operatorname{co}\ker\overline{\mathrm{N}\left(\phi_p^{(k,o)}\right)}<\infty \text{ и } \dim\operatorname{co}\ker\overline{\mathrm{N}\left(\phi_p^{(k,1)}\right)}<\infty;$$

здесь $\overline{\mathrm{N}\left(\phi_p^{(k,v)}\right)}$ означает замыкание линейной оболочки множества векторов $\left\{\phi_0^{(k,v)}\right\}$.

Доказательство. Оператор-функцию $\mathrm{N}(\gamma)$ будем рассматривать как возмущение пучка Келдыша $\mathrm{I}-\tilde{\mathrm{K}}+\gamma^2\mathrm{K}$, аналитической в Λ_η оператор-функцией $\mathrm{S}(\gamma):=\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2$ и $\mathrm{S}(\infty)=0$. В нашем случае K является оператором Гильберта – Шмидта, поэтому выполнены все условия теоремы 1 из [10], в силу которой система с.п.в. оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$ двукратно полна с конечным дефектом в $H\times H$, т.е. замыкание линейной оболочки векторов

$$\left(\phi_p^{(k,0)},\phi_p^{(k,1)}\right)^T\in H\times H,$$

где векторы $\phi_p^{(k,v)}$ взяты из (18), имеет конечный дефект в $H\times H$; $\gamma_k\in\Lambda_\eta$.

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г. Применение методов операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода // Доклады Академии наук СССР. 1990. Т. 312, № 3. С. 597–599.
2. Делицин А. Л. Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитодиэлектрическим заполнением // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 629–633.
3. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. 268 с.
4. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results // SIAM J. Math. Anal. 1988. Vol. 19 (3). P. 613–626.

5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М. : Мир, 1972. 740 с.
6. Adams R. A. Sobolev Spaces. New York : Academic Press, 1975.
7. Смирнов Ю. Г., Смолькин Е. Ю. Метод оператор-функций в задаче о нормальных волнах неоднородного волновода // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 9. С. 1196–1206.
8. Смирнов Ю. Г., Смолькин Е. Ю. Исследование спектра в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, № 6. С. 1–4.
9. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1965. 448 с.
10. Радзиевский Г. В. Полнота корневых векторов пучка Келдыша, возмущенного аналитической оператор-функцией S(λ) с S(∞) = 0 // Математические заметки. 1977. Т. 21, № 3. С. 391–398.

References

1. Smirnov Yu.G. Application of operator beam methods in the problem of eigenwaves of a partially filled waveguide. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Science*. 1990;312(3):597–599. (In Russ.)
2. Delitsin A.L. On the approach to the question of the completeness of normal waves in a waveguide with magnetodielectric filling. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2000;36(5):629–633. (In Russ.)
3. Smirnov Yu.G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for studying problems of electrodynamics*. Penza: PenzGU, 2009:268. (In Russ.)
4. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results. *SIAM J. Math. Anal.* 1988;19(3):613–626.
5. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov = The perturbation theory of linear operators*. Moscow: Mir, 1972:740. (In Russ.)
6. Adams R.A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975.
7. Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu. Operator function method in the problem of normal waves of an inhomogeneous waveguide. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2018;54(9):1196–1206. (In Russ.)
8. Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu. The spectrum research in the problem of normal waves of a closed regular inhomogeneous dielectric waveguide of arbitrary cross section. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*. 2018;478(6):1–4. (In Russ.)
9. Gokhberg I.Ts., Kreyn M.G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve = Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators in a Hilbert space*. Moscow: Nauka, 1965:448. (In Russ.)
10. Radzievskiy G.V. Completeness of root vectors of a Keldysh pencil perturbed by an analytic operator function S(λ) with S(∞) = 0. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*. 1977;21(3):391–398. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Евгений Юрьевич Смолькин
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Evgeniy Yu. Smol'kin
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Максим Олегович Снегур
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Maksim O. Snegur
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

Поступила в редакцию / Received 07.04.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.04.2021

Принята к публикации / Accepted 25.04.2021